Exercices de révision du programme de Terminale

Partie I : Enoncés des Exercices

1 Équations - Inéquations

Exercice 1.1

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(2x+1)(x+2) \leqslant 0$
2. $\dfrac{2x+1}{x+2} \leqslant 0$
3. $\dfrac{x-2}{x+3} \geqslant \dfrac{x}{x-1}$

Exercice 1.2

L'objectif ici, est de savoir faire ces calculs correctement et **rapidement**, c'est pour cela qu'ils sont assez simples. Compléter ou résoudre l'équation ou inéquation :

1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) =$
2. $\sin(x) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\tan(x) = \sqrt{3}$
   Remarque. Si vous ne la connaissez pas, voir exercice 4.1 pour la définition de la fonction tangente

Exercice 1.3

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ (utiliser des combinaisons linéaires d'équations) :

$$(S_1)\begin{cases} (E_1)\ \ 2x + \ y = 3 \\ (E_2)\ \ x \ - 3y = 8 \end{cases}$$

2 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 2.1

Soient x, a, b, c, d des réels strictement positifs. Cochez la réponse correcte :

1. On a $\ln(a+b) =$

   ☐ $\ln(a)\ln(b)$ ☐ $\ln(a)+\ln(b)$ ☐ $\ln(ab)$ ☐ rien de tout cela

2. On a $\ln(ab) =$

   ☐ $\ln(a)\ln(b)$ ☐ $\ln(a)+\ln(b)$ ☐ $\ln(a+b)$ ☐ rien de tout cela

3. On a $\mathrm{e}^{a+b} =$

   ☐ $\mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$ ☐ $\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b$ ☐ $(\mathrm{e}^a)^b$ ☐ rien de tout cela

4. On a $\sqrt{a+b} =$

   ☐ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ☐ $\sqrt{a}\sqrt{b}$ ☐ rien de tout cela

5. On a $\sqrt{a}\sqrt{b} =$

   □ $\sqrt{ab}$ □ $(\sqrt{a})^{\sqrt{b}}$ □ rien de tout cela

6. On a $0^0 =$

   □ 1 □ 0 □ rien de tout cela

7. On a $(x^a)^b =$

   □ x^{a^b} □ x^{ab} □ $x^a x^b$ □ rien de tout cela

Exercice 2.2

Compléter :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} =$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} =$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} =$

Exercice 2.3

Faire l'étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x(x^2 - 3x + 4)$ et dessiner son allure sur un graphe.

Exercice 2.4

Faire l'étude et tracer l'allure des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$. On déterminera avec soin le domaine d'étude et on tracera le graphe sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. $g : x \mapsto \sqrt{9x^2 - 6x + 1}$.

Exercice 2.5

Dans chaque cas suivant, donner le domaine de définition de la fonction puis calculer sa dérivée en précisant sur quel ensemble la fonction est dérivable :

1. $f : x \mapsto \ln(2x+1)$
2. $g : x \mapsto \dfrac{x^3}{\cos^2(x)}$
3. $h : x \mapsto \sin(\pi - 2x)$
4. $k : x \mapsto \left|\sin(\pi - 2x)\right|$

3 Suites numériques - Raisonnement par récurrence

Exercice 3.1

Soit la suite (v_n) définie par : $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{3} + 1$. avec $v_0 = 1$. C'est une suite **arithmético géométrique**.

1. Déterminer la solution réelle a de l'équation, $x = \dfrac{x}{3} + 1$.
2. Posons alors $u_n = v_n - a$.
   Montrer que (u_n) est alors une suite géométrique, préciser sa raison et le premier terme.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

Remarque. Dans les exercices suivants (et de manière générale), on utilise la notation « $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ » qui représente la somme pour l'indice k entier variant de 1 à n des $f(k)$, ainsi on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{5} \sin(k+n) = \sin(2+n) + \sin(3+n) + \sin(4+n) + \sin(5+n)$$

Exercice 3.2

Montrer par récurrence que : $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{(n^2)(n+1)^2}{4}$.

Exercice 3.3

Considérons la suite (u_n) définie par :$u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2}$.

1. Montrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k$ est égale à : $\frac{n(n+1)}{2}$.
2. En déduire une simplification de u_n.
3. Etudier la convergence de cette suite.

Exercice 3.4

Soit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$ et $u_0 = 2$
On définit une nouvelle suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + 6$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4 Trigonométrie

Exercice 4.1

On pose $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de cette fonction appelée tangente. On le notera D.
2. Montrer que pour tout $x \in D$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Exercice 4.2

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.
En déduire une égalité du même type pour $\sin(3x)$.

Exercice 4.3

Toutes les formules de trigonométrie sont à savoir parfaitement, pour vous aider à tester si vous les avez bien apprises, compléter le formulaire suivant :

1. $\sin(2a) =$
2. $\cos(a+b) =$
3. $\tan(2a) =$
4. $\cos(a)\cos(b) =$
5. $\sin^2(a) =$ en fonction de $\cos(2a)$
6. $\sin(a) + \sin(b) =$ (transformation en produit)

5 Calcul intégral - Calcul de primitives

Exercice 5.1

Calculer les intégrales suivantes :

✓ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$

✓ $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$

✓ $\displaystyle\int_{0,5}^1 \frac{\ln(t)}{t}dt$

✓ $\displaystyle\int_0^1 e^{3u}du$

✓ $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{3x+1}dx$

Exercice 5.2

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f_3(x) = \dfrac{1}{1-x}$
2. $f_4(x) = \dfrac{1}{(3x+1)^2}$

6 Calcul algébrique

Exercice 6.1

Simplifier : $\dfrac{1+\frac{x+1}{x+3}}{x+4}$

Exercice 6.2

Simplifier :$(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$

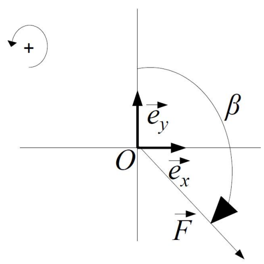
Exercice 6.3

Simplifier l'expression :$\dfrac{\frac{x+y}{1+xy}+z}{1+z\frac{x+y}{1+xy}}$

7 Géométrie

Exercice 7.1

Donner les composantes de la force $\vec{F}$ dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ en fonction de β et de sa norme notée F.



Partie II : INDICATIONS

1 Équations - Inéquations

Exercice 1.1

1. Faire un tableau de signe si besoin.
2. Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit (en enlevant les annulations du dénominateur).
3. Regrouper en mettant au même dénominateur.

Exercice 1.2

1. Utiliser le cercle trigonométrique.
2. Connaître les valeurs de $\tan(x)$ pour les angles « classiques » ($0,\ \pi/6,\ \pi/4,\ \pi/3$).

Exercice 1.3

$3(E_1) + (E_2)$ donne x.

2 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 2.1

Voir l'étude des fonctions usuelles correspondantes.

Exercice 2.2

1. C'est une limite usuelle
2. Ce n'est pas une forme indéterminée.
2. C'est une limite usuelle

Exercice 2.3

Il est plus facile de développer le produit avant de calculer la dérivée !

3 Suites numériques - Raisonnement par récurrence

Exercice 3.1

3. Commencer par donner u_n en fonction de n.

4 Trigonométrie

Bien apprendre les formules de trigo !!!!!

5 Calcul intégral - Calcul de primitives

Exercice 5.1

Chercher à reconnaître des formes dérivées comme « $\frac{u'}{u}$, $u' \times u^n$, ... » pour pouvoir intégrer directement. Il est important de s'entrainer à « voir » cela.

6 Calcul algébrique

Ces exercices utilisent des reflexes de calcul que vous devez avoir déjà acquis : développer, factoriser, mettre sous le même dénominateur...

7 Géométrie

Exercice 7.1

Savoir faire ce genre d'exercice est indispensable en particulier pour les cours de physique, on vous demande d'être efficace et de savoir répondre rapidement à ce type de questions. Plusieurs techniques peuvent être utilisées, on pourra par exemple considérer le vecteur $\vec{u} = \frac{\vec{F}}{F}$ qui est un vecteur du cercle trigonométrique et faire le lien entre β et l'angle θ « habituel » (entre $\vec{e}_x$ et $\vec{u}$) tel que $\vec{u}$ ait pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. On a ici $\theta = \beta - \frac{\pi}{2}$.